

EXERCICE 4 – GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

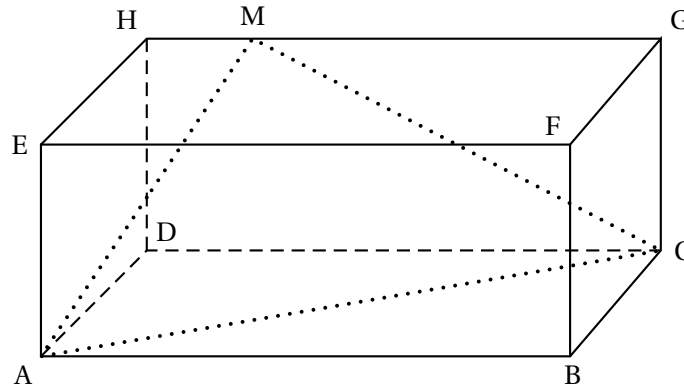
7 points

Dans la figure ci-dessous, ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle tel que

$AB = 5$, $AD = 3$ et $AE = 2$.

L'espace est muni d'un repère orthonormé d'origine A dans lequel les points B, D et E ont respectivement pour coordonnées $(5; 0; 0)$, $(0; 3; 0)$ et $(0; 0; 2)$.

Le repère est donc : $\left(A; \frac{1}{5}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}, \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} \right)$.



1. a. $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$ donc le point H a pour coordonnées $(0; 3; 2)$.
 $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$ donc le point G a pour coordonnées $(5; 3; 2)$.
- b. La droite (GH) a pour vecteur directeur \overrightarrow{HG} de coordonnées $(5; 0; 0)$.
 De plus, elle passe par le point G donc elle a pour représentation paramétrique :
- $$\begin{cases} x = 5 + 5t \\ y = 3 \\ z = 2 \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

2. Soit M un point du segment [GH] tel que $\overrightarrow{HM} = k\overrightarrow{HG}$ avec k un nombre réel de l'intervalle $[0; 1]$.

a. $\overrightarrow{HM} = k\overrightarrow{HG} \iff \begin{cases} x_M - 0 = 5k \\ y_M - 3 = 0 \\ z_M - 2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_M = 5k \\ y_M = 3 \\ z_M = 2 \end{cases}$

Donc les coordonnées de M sont $(5k; 3; 2)$.

- b. Les coordonnées de \overrightarrow{AM} sont celles de M donc : $(5k; 3; 2)$.

Les coordonnées de C sont $(5; 3; 0)$, donc celles de \overrightarrow{CM} sont $(5k - 5; 3 - 3; 2 - 0)$ soit $(5k - 5; 0; 2)$.

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CM} = 5k \times (5k - 5) + 3 \times 0 + 2 \times 2 = 25k^2 - 25k + 4$$

- c. Le triangle AMC est rectangle en M si et seulement si $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{CM}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CM}$ ou encore $25k^2 - 25k + 4 = 0$.

$$\text{On résout cette équation. } \Delta = (-25)^2 - 4 \times 25 \times 4 = 225 = 15^2$$

$$\text{L'équation admet deux solutions } k' = \frac{25 + 15}{2 \times 25} = \frac{40}{50} = \frac{4}{5} \text{ et } k'' = \frac{25 - 15}{2 \times 25} = \frac{10}{50} = \frac{1}{5}$$

Donc pour $k = \frac{1}{5}$ ou $k = \frac{4}{5}$, le triangle AMC est rectangle en M.

Dans toute la suite de l'exercice, on considère que le point M a pour coordonnées (1 ; 3 ; 2).

On admet que le triangle AMC est rectangle en M.

3. On considère le point K de coordonnées (1 ; 3 ; 0).

a. Le plan (ACD) a pour vecteurs directeurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AD} , donc il a pour équation cartésienne $z = 0$.

b. $z_K = 0$ donc le point K appartient au plan (ACD).

\overrightarrow{MK} a pour coordonnées (0 ; 0 ; -2), donc

- $\overrightarrow{MK} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ donc $\overrightarrow{MK} \perp \overrightarrow{AB}$;
- $\overrightarrow{MK} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ donc $\overrightarrow{MK} \perp \overrightarrow{AC}$.

On en déduit que \overrightarrow{MK} est orthogonal au plan (ACD), et donc que K est le projeté orthogonal du point M sur le plan (ACD).

c. Le volume du tétraèdre MACD est : $\frac{1}{3} \times \text{Aire de ACD} \times MK$.

\overrightarrow{MK} a pour coordonnées (0 ; 0 ; -2), donc $MK = 2$.

Le triangle ACD est rectangle en D donc a pour aire $\frac{AD \times DC}{2} = \frac{3 \times 5}{2} = \frac{15}{2}$.

Le volume du tétraèdre MACD est donc, en unités de volume : $\frac{1}{3} \times \frac{15}{2} \times 2 = 5$.

4. On note P le projeté orthogonal du point D sur le plan (AMC).

Si on considère D comme sommet du tétraèdre MACD, la base est le triangle AMC, et la hauteur est DP.

Le triangle AMC est rectangle en M donc son aire est : $\frac{AM \times MC}{2}$.

$$AM = \sqrt{(1-0)^2 + (3-0)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{14}$$

$$CM = \sqrt{(1-5)^2 + (3-3)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{20}$$

$$\text{L'aire de AMC vaut : } \frac{\sqrt{14} \times \sqrt{20}}{2} = \sqrt{70}.$$

Le tétraèdre MACD a donc pour volume : $\frac{1}{3} \times \sqrt{70} \times DP$ soit : $\frac{DP\sqrt{70}}{3}$.

On sait que ce volume vaut 5, donc : $\frac{DP\sqrt{70}}{3} = 5$ donc : $DP = \frac{15}{\sqrt{70}} \approx 1,8$.